Tentamen Functionaalanalyse, 2006-2007

Datum : 09-11-2006

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw de ruimte $C^1([0,1])$ van continu differentieerbare reële functies op $[0,1]$. Definieer de lineaire operator $T : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ door $Tf = \frac{df}{dx}(\frac{1}{2})$.

   (a) Laat zien dat T onbegrensd is als we $C^1([0,1])$ zien als deelruimte van $C([0,1])$ met de gebruikelijke supremum norm $\| f \| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

   (b) Definieer op $C^1([0,1])$ de alternatieve norm

   $$\| f \|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |\frac{df}{dx}(x)|$$

   Laat zien dat $\| \cdot \|_1$ een norm definieert op $C^1([0,1])$.

   (c) Bewijs dat de lineaire operator $T : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ wel begrensd is in de nieuwe norm $\| \cdot \|_1$. Bepaal de operatornorm van T in dit geval.

2. Laat X een genormeerde lineaire ruimte met norm $\| \cdot \|$, en beschouw de lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$ van begrensde operatoren van X naar X met als norm de operatornorm (voor de eenvoud van notatie ook aangegeven door $\| \cdot \|$).

   (a) Beschouw een vaste operator $A \in \mathcal{B}(X)$, en definieer de lineaire operator $T : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ door

   $$T(Y) = YA$$

   met $Y \in \mathcal{B}(X)$, en $YA : X \to X$ de gebruikelijke compositie van twee lineaire operatoren van X naar zichzelf. Bewijs dat de operatornorm $\| T \|$ van T (als afbeelding van $\mathcal{B}(X)$ naar $\mathcal{B}(X)$!) voldoet aan

   $$\| T \| \leq \| A \|$$

   Geldt dit ook met gelijkheid ?

   (b) Beschouw twee vaste operatoren $A, B \in \mathcal{B}(X)$, en definieer de lineaire operator $T : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ door

   $$T(Y) = BYA$$

   met $Y \in \mathcal{B}(X)$. Bewijs dat $\| T \| \leq \| B \| \| A \|$

3. Laat K een gesloten deelruimte van een Hilbertruimte H. Dan kan iedere $x \in H$ op eenduidige wijze geschreven worden als $x = y + z$ met $y \in K$ en $z \in K^{\perp}$.

Beschouw nu een lineaire operator $\lambda : K \to \mathbb{R}$, en breidt de operator λ uit tot een operator $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ door voor iedere $x \in H$ te definiëren

$$\Lambda(x) = \lambda(y)$$

waarbij y de eenduidig bepaalde component van x in K is (d.w.z., $x = y + z$ met $y \in K$ en $z \in K^{\perp}$).

(a) Bewijs dat $\| \Lambda \| = \| \lambda \|$.

(b) Toon aan dat deze operator $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ de *unieke* uitbreiding van $\lambda : K \to \mathbb{R}$ is die voldoet aan de zojuist bewezen eigenschap $\| \Lambda \| = \| \lambda \|$.

(c) Vergelijk het onder (a) en (b) bewezene met de stelling van Hahn-Banach. Wat zijn precies de verschillen in aannames en in uitspraken ?

4. Beschouw de operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ gedefinieerd door

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(a) Er kan bewezen worden dat voor iedere $f \in L^2(0,1)$ de functie $\int_0^x f(t)dt$ bijna overal differentieerbaar is met afgeleide $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$.
Bepaal nu de eigenwaarden van T. (Hint: Laat zien dat een eigenfunctie f bij een eigenwaarde λ voldoet aan $f(x) = \lambda \frac{df}{dx}(x)$ en $f(0) = 0$.)

(b) Toon aan dat de geadjungeerde operator (Engels: 'adjoint operator') T^* gegeven wordt door

$$T^*f(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

Bepaal alle eigenwaarden van T^*.

(c) Toon aan dat $\| T \| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. (Aanwijzing: Schrijf $\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)I_x(t)dt$ met $I_x(t) = 1$ voor $t \leq x$ en 0 elders, en pas de ongelijkheid van Hölder voor $p = q = 2$ toe.) Bewijs dat de vergelijking

$$\lambda f(x) - \int_0^x f(t)dt = g(x)$$

voor iedere $g \in L^2(0,1)$ een unieke oplossing heeft indien $\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(d) Definieer de operator $K = T^*T$. Bewijs dat K zelfgeadjungeerd is en dat alle eigenwaarden van K positief zijn.

(e) Er kan berekend worden dat $\| K \| = \frac{4}{\pi^2}$ (dit is de grootste eigenwaarde van K). Bereken op grond hiervan $\| T \|$.

Puntenverdeling:

1. a: 6, b: 7, c: 10.
2. a: 10, b: 5.
3. a: 10, b: 5, c: 5.
4. a: 7, b: 7, c: 8, d: 6, e: 4.

Gratis: 10, Totaal: 100